Tema 3: Geometría afín

Ejercicios

1. Sean $P(1,1,1)$, $Q(0,1,2)$, $\mathbf{u} = (-1,2,0)$ y $\mathbf{v} = (1,-1,-1)$. Halla las ecuaciones paramétricas e implícitas de las siguientes rectas:

   (a) Recta que pasa por P con vector de dirección $\mathbf{u} - \mathbf{v}$.

   (b) Recta que pasa por P y Q.

   (c) Recta que pasa por Q con vector de dirección $3\mathbf{v}$.

2. Halla las ecuaciones de la recta que pasa por el punto $(1,1,1)$ y es paralela a la recta $r \equiv \left\{ \begin{array}{l} 3x - y + z = 1 \\ x + y - 3z = 0 \end{array} \right.$.

3. Sean $P(1,2,3)$, $Q(-1,-2,-3)$, $R(0,1,-1)$, $\mathbf{u} = (0,1,-1)$ y $\mathbf{v} = (5,1,2)$. Halla las ecuaciones paramétricas e implícitas de los siguientes planos:

   (a) Plano que pasa por P, Q y R.

   (b) Plano que pasa por P y R, y es paralelo a la recta que pasa por Q con vector de dirección $\mathbf{u} - \mathbf{v}$.

   (c) Plano que contiene a R con subespacio de direcciones $L\left(\{\mathbf{u} + 2\mathbf{v},\, 2\mathbf{u} + \mathbf{v}\}\right)$.

4. Halla las ecuaciones paramétricas e implícitas de las siguientes variedades afines:

   (a) Recta que pasa por $P(1/2,-1,2)$ y es paralela a $s \equiv \frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1/2}{-3}$.

   (b) Recta paralela a la recta s del apartado anterior y que pasa por el origen.

   (c) Plano paralelo al eje OY que pasa por los puntos $(2,-1,4)$ y $(3,0,-1)$.

   (d) Plano paralelo al plano $3x + 4y + z = -7$ que corta al eje OX en el punto $x = -2$.

   (e) Plano paralelo al plano $x + y + 3z = 8$ que pasa por el punto $(2,-1,0)$.

   (f) Plano paralelo al plano $2x-3y+6z = -7$ y que pasa por el punto de intersección de los planos
   $$x - z = 1\,; \quad y - 2z = 1\,; \quad 3x - y = -2$$

   (g) Recta que pasa por $(1,-1,2)$ y es paralela a los planos
   $$\pi \equiv x - 3y + 2z = -1 \qquad\qquad \sigma \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = 1 - 3\lambda + \mu \\ y = \lambda - 2\mu \\ z = 2 + \mu \end{array} \right. \quad ; \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

5. Halla la recta que pasa por $(1,-1,0)$ y $(-2,1,1)$, y su punto de intersección con el plano $3x - y + z = 0$.

6. Halla la ecuación del plano que contiene a la recta $r \equiv x = \frac{y-1}{2} = z + 3$ y es paralelo a la recta $\left\{ \begin{array}{l} 2x + y + z = 1 \\ x - y + 2z = 0 \end{array} \right.$.

7. Sea r la recta que para por $(-1,1,0)$ y $(-3,2,1)$, y s la recta que pasa por $(1,0,-1)$ con subespacio de direcciones $\{(x,y,z)\,:\,x+y=0,\ 2y+z=0\}$. Prueba que se cortan y halla la ecuación del plano que determinan.

8. Obtén las ecuaciones implícitas de la recta paralela a $t \equiv x=y=z$ y que se apoya en las rectas $r \equiv \left\{\begin{array}{l} x-z=-1 \\ y+3z=2 \end{array}\right.$ y $s \equiv \left\{\begin{array}{l} x-5z=4 \\ y-4z=-3 \end{array}\right.$.

9. Determina la posición relativa, y la intersección en su caso, de los siguientes pares de rectas:

   (a) $(x,y,z)=(-1,2,1)+\alpha(4,3,2)$ y $(x,y,z)=(0,1,0)+\alpha(1,3,2)$.
   (b) $\frac{x+4}{5}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+1}{-4}$ y $\frac{x+9}{-5}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-3}{2}$.
   (c) $\left\{\begin{array}{l} 2x-3y-z=3 \\ x-3y=4 \end{array}\right.$ y $\left\{\begin{array}{l} x+y=2 \\ y-z=-1 \end{array}\right.$.

10. Halla la intersección de los siguientes pares de planos:

    (a) $x-y+z=1$ y $2x+2y-3z=4$.
    (b) $(x,y,z)=\alpha(1,1,-1)+\beta(0,1,-2)$ y $(x,y,z)=(0,1,0)+\alpha(0,1,-1)+\beta(2,3,5)$.

11. Averigua la posición relativa de los siguientes planos:

$$\begin{array}{ll} \pi_1 \equiv 2x+2y-z=-1 & \pi_3 \equiv 4y+7z=3 \\ \pi_2 \equiv x-y-4z=-2 & \pi_4 \equiv 2x+2y-z=3 \end{array}$$

12. En $\mathbb{R}^4$, halla la ecuación del hiperplano paralelo a $x_1-2x_2+x_3-x_4=0$ y que pasa por el punto $P(0,1,1,1)$.

13. Halla, según los valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$, la intersección de los planos:

$$\pi_1 \equiv \left\{\begin{array}{l} x_1+x_4=0 \\ x_2-x_3=1 \end{array}\right.$$

$$\pi_2 \equiv (x_1,x_2,x_3,x_4)=(0,0,1,-1)+L\left(\{(a,2,2,-4),(1,0,1,0)\}\right)$$

14. Halla el valor de a para que los planos

$$\pi_1 \equiv \left\{\begin{array}{l} x_1=a+3\lambda+2\mu \\ x_2=1-\lambda-\mu \\ x_3=4+\lambda \\ x_4=6+5\lambda+2\mu \end{array}\right. \qquad \pi_2 \equiv \left\{\begin{array}{l} x_1=2+\lambda+2\mu \\ x_2=1 \\ x_3=1+\lambda+\mu \\ x_4=3\lambda \end{array}\right.$$

    tengan intersección no vacía.

15. Halla la ecuación de un hiperplano que pase por $P(1,-1,0,0)$ y $Q(-1,0,0,1)$, y que sea paralelo al plano $\pi \equiv (-1,0,1,0)+L\left(\{(2,-1,-1,1),(-1,1,2,0)\}\right)$.

16. Halla la ecuación de una recta que pase por el punto $P(2,-1,1,1)$ y que no corte al plano

$$\pi \equiv (x_1,x_2,x_3,x_4)=(1,0,0,-1)+L\left(\{(0,1,-1,0),(2,1,0,-2)\}\right)$$

    Halla la ecuación implícita de un hiperplano que contenga a π y a la recta.

Soluciones

1. (a) $\left\{\begin{array}{l} x=1-2\alpha \\ y=1+3\alpha \\ z=1+\alpha \end{array}\right.$, $\alpha\in\mathbb{R}$; y $\left\{\begin{array}{l} x+2z=3 \\ y-3z=-2 \end{array}\right.$

   (b) $\left\{\begin{array}{l} x=1-\alpha \\ y=1 \\ z=1+\alpha \end{array}\right.$, $\alpha\in\mathbb{R}$; y $\left\{\begin{array}{l} x+z=2 \\ y=1 \end{array}\right.$

   (c) $\left\{\begin{array}{l} x=\alpha \\ y=1-\alpha \\ z=2-\alpha \end{array}\right.$, $\alpha\in\mathbb{R}$; y $\left\{\begin{array}{l} x+y=1 \\ x+z=2 \end{array}\right.$

2. $x=1+\alpha$, $y=1+5\alpha$, $z=1+2\alpha$; $\alpha\in\mathbb{R}$.

3. (a) $\left\{\begin{array}{l} x=\alpha-\beta \\ y=1+\alpha-3\beta \\ z=-1+4\alpha-2\beta \end{array}\right.$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$; y $5x-y-z=0$

   (b) $\left\{\begin{array}{l} x=\alpha+5\beta \\ y=1+\alpha \\ z=-1+4\alpha+3\beta \end{array}\right.$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$; y $3x+17y-5z=22$

   (c) $\left\{\begin{array}{l} x=10\alpha+5\beta \\ y=1+3\alpha+3\beta \\ z=-1+3\alpha \end{array}\right.$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$; y $3x-5y-5z=0$

4. (a) $\left\{\begin{array}{l} x=1/2-\lambda \\ y=-1+2\lambda \\ z=2-3\lambda \end{array}\right.$, $\lambda\in\mathbb{R}$; y $\left\{\begin{array}{l} 2x+y=0 \\ 3y+2z=1 \end{array}\right.$.

   (b) $\left\{\begin{array}{l} x=-\lambda \\ y=2\lambda \\ z=-3\lambda \end{array}\right.$, $\lambda\in\mathbb{R}$; y $\left\{\begin{array}{l} 2x+y=0 \\ 3y+2z=0 \end{array}\right.$.

   (c) $\left\{\begin{array}{l} x=3+\lambda \\ y=\lambda+\mu \\ z=-1-5\lambda \end{array}\right.$, $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$; y $5x+z=14$.

   (d) $\left\{\begin{array}{l} x=\lambda \\ y=\mu \\ z=-6-3\lambda-4\mu \end{array}\right.$, $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$; y $3x+4y+z=-6$.

   (e) $\left\{\begin{array}{l} x=1-\lambda-3\mu \\ y=\lambda \\ z=\mu \end{array}\right.$, $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$; y $x+y+3z=1$.

   (f) $\left\{\begin{array}{l} x=3\lambda \\ y=3+2\lambda+2\mu \\ z=\mu \end{array}\right.$, $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$; y $2x-3y+6z=-9$.

   (g) $\left\{\begin{array}{l} x=8-7\lambda \\ y=-\lambda \\ z=2\lambda \end{array}\right.$, $\lambda\in\mathbb{R}$; y $\left\{\begin{array}{l} x-3y+2z=8 \\ x+3y+5z=8 \end{array}\right.$.

5. $x=1+3\lambda$, $y=-1-2\lambda$, $z=-\lambda$, $\lambda\in\mathbb{R}$. $P(-1/5,-1/5,2/5)$.

6. $x-2y+3z=-11$.

7. $r \cap s = \{(1, 0, -1)\}$. $3x + 5y + z = 2$.

8. $\left\{ \begin{array}{l} 4x - 4y = 23 \\ x - z = -1 \end{array} \right.$.

9. (a) y (c) Se cruzan. (b) Se cortan en el punto $(-9, 1, 3)$.

10. (a) $(x, y, z) = (2, 3, 2) + \lambda(1, 5, 4)$; (b) $(x, y, z) = (0, -1, 2) + \lambda(1, -3, 7)$.

11. $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = r \equiv \frac{x-1}{9} = \frac{y+1}{-7} = \frac{z-1}{4}$; $\pi_4 \parallel \pi_1$; y $\pi_4 \cap \pi_2 = s_1$ y $\pi_4 \cap \pi_3 = s_2$ con $s_1 \parallel s_2$.

12. $x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -2$.

13. $\pi_1 \cap \pi_2 = \begin{cases} \emptyset \text{ (se cruzan)} & \text{, si } a = 4 \\ P\left(\frac{a+8}{a-4}, \frac{6}{a-4}, \frac{10-a}{a-4}, \frac{-a-8}{a-4}\right) & \text{, si } a \neq 4 \end{cases}$.

14. $a = 6$.

15. $3x_1 + 7x_2 - 2x_3 - x_4 = -4$.

16. Recta: $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2, -1, 1, 1) + \alpha(0, 1, -1, 0)$.
Hiperplano: $2x_1 - 6x_2 - 6x_3 - x_4 = 3$.